Diskrete und Kontinuierliche Modellierung

Bei Modellen unterscheidet man unter anderem zwischen diskreten und kontinuierlichen Modellen. In diesem Artikel möchte ich den Unterschied zwischen beiden Arten aufzeigen und anhand eines kleinen Beispiels die Bedeutung des gewählten Zeitschrittes beim Modellieren erklären.

Die folgende Graphik stellt in a nutshell ein Modell eines Systems mit seinen Elementen Bestandsgröße B, Flußgröße F, Eingabegröße E und Verhaltensgröße V dar.

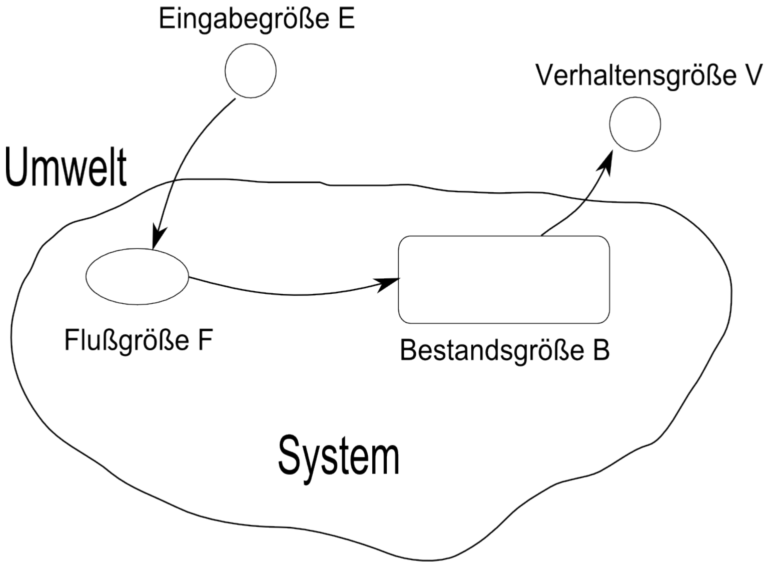

Abbildung 1: Modell eines Systems mit seinen Elementen

Die Eingabe- und Verhaltensgrößen sind externe Faktoren. Die Eingabegrößen spiegeln den Einfluß der Umwelt auf das System wieder. Die Verhaltensgrößen stellen das Verhalten des Systems dar, also das was von dem System in der Umwelt beobachtbar ist. Die Beziehungen zwischen den Eingabegrößen $\rightarrow$ Flußgrößen und Bestandsgrößen $\rightarrow$ Verhaltensgrößen lassen sich über algabraische oder logische Formeln darstellen. Die Beziehung zwischen Fluß- und Bestandsgröße wird über Differenzengleichungen bei diskreten Modellen und Differentialgleichungen bei kontinuierlichen Modellen dargestellt. Bei kontinuierlichen Modellen gibt es zu jedem Zeitpunkt des gewählten Zeitraumes der Modellierung Werte für die Bestandsgrößen des Modells. Bei diskreten Modellen gibt es diese nur zu ausgewählten Zeitpunkten, also nicht während des ganzen Zeitraumes. Demzufolge werden die Flußgrößen auch nicht über die Zeit zu der Bestandsgröße integriert. Die folgenden Gleichungen gelten.

1. Diskretes Modell: $B_{t+1} = f(F_t, E_t, t)$
2. Kontinuierliches Modell: $B^{'}_{t+1} = f(F_t, E_t, t)$

wobei t den Zeitschritt des Modells darstellt. Bei diskreten Modellen errechnet sich die neue Bestandsgröße B_{t+1} direkt aus der oben angegebenen Formel. Bei kontinuierlichen

Modellen muß das erhaltene Ergebnis noch über die Zeit zu der Bestandsgröße B_{t+1} integriert werden.

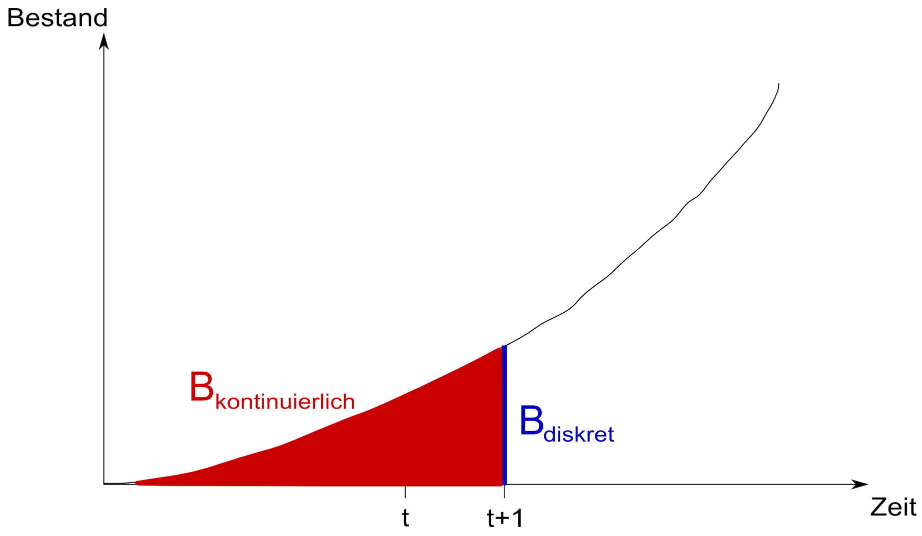

Abbildung 2: Diskrete und Kontinuierliche Bestandsgrößen

In der Natur hat man es in den meisten Fällen mit kontinuierlichen Systemen zu tun. Allerdings muß man beachten, dass jede Simulationssoftware diese kontinuierlichen Modelle diskretisiert und dann die Bestandsgrößen über numerische Integrationsverfahren wie Euler-Cauchy oder Runge-Kutta über Differenzengleichungen errechnet. Auf Details beider Verfahren möchte ich hier nicht weiter eingehen. Nur soviel. Das Runge-Kutta Verfahren ist genauer als das Euler-Cauchy Verfahren, da das Euler-Cauchy Verfahren immer die Flußgröße des letzten Iterationsschrittes nimmt: $B_{t+1} = B_t + F_t * \Delta T$ mit T als Zeitschrittweite. Bei einer großen Schrittweite kann diese dann sehr ungenau sein. Beim Runge-Kutta Verfahren werden noch Zwischenwerte für die Flußgröße F_t berechnet und diese dann zur Berechnung von B_{t+1} verwendet. Die folgende Graphik soll die numerische Integration laut Euler-Cauchy von kontinuierlichen Modellen, wie sie auch jede Simulationssoftware anwendet, veranschaulichen. Übrigens kann man im CONSIDEO MODELER die Art der numerischen Integration wählen. Voreingestellt ist das Euler-Cauchy Verfahren. In der Abbildung 3 wird das Simulationsergebnis des Füllens einer Badewanne mit den beiden Verfahren Euler-Cauchy und mit dem Runge-Kutta dargestellt. Von Zeitschritt 3 auf 4 wird der Zufluss von 1 auf 4 erhöht. Man erkennt beim Euler-Cauchy Verfahren, dass ab dem Zeitpunkt 4 diese Erhöhung eine einmalige Auswirkung hat. Bei Runge-Kutta wird bereits zwischen Zeitpunkt 3 und 4 eine Veränderung des Zuflusses im Wasserstand sichtbar. Das bedeutet, das Runge-Kutta Verfahren stellt den Wasserstand über die Zeit genauer dar, da man aufgrund der Kontinuität des Modells davon ausgehen, dass der Zufluß des Wassers zwischen den Zeitpunkten 3 und 4 nicht auf einmal einen Sprung von 1 auf 4 machen kann, sondern dass dieser Übergang allmählich (kontinuierlich) geschieht.

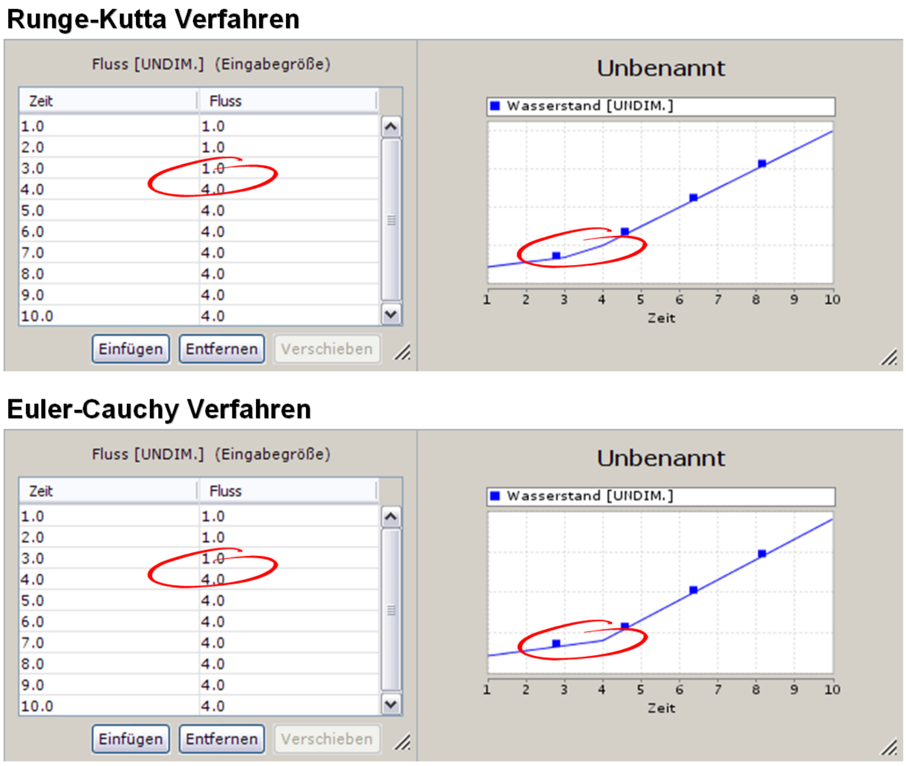

Abbildung 3: Vergleich Euler-Cauchy und Runge-Kutta

Die Abbildung 4 zeigt das Vorgehen bei der numerischen Integration bei kontinuierlichen Modellen mit dem Euler-Cauchy Verfahren. Man erkennt, je weiter die Zeitschrittweite gewählt wird, desto ungenauer wird die Approximation an den exakten Bestand. Denn es wird immer mit der ersten Ableitung vom jeweiligen Zeitpunkt (zum Beispiel $t+1$) bis zum nächsten Zeitpunkt (dann $t+2$) linear extrapoliert. Allerdings heißt das nicht, daß stets eine geringe Zeitschrittweite gewählt werden muß. Denn je kleiner die Zeitschrittweite ist, desto größer ist die Rechenlast, gerade wenn über einen langen Zeitraum simuliert werden muß. Des Weiteren müssen die Bestandsgrößen auf die Zeitsensibilität untersucht werden. Nehmen wir beispielsweise die Höhe eines Baumes als Bestand. Dafür macht es sicherlich keinen Sinn die Zeitschrittweite $Wochen$ zu wählen. Es kann auch vorkommen, daß Bestandsgrößen aufgrund ihrer unterschiedlichen Zeitsenibilität in getrennten Teilmodellen simuliert werden und dann in einem Gesamtmodell konsolidiert werden.

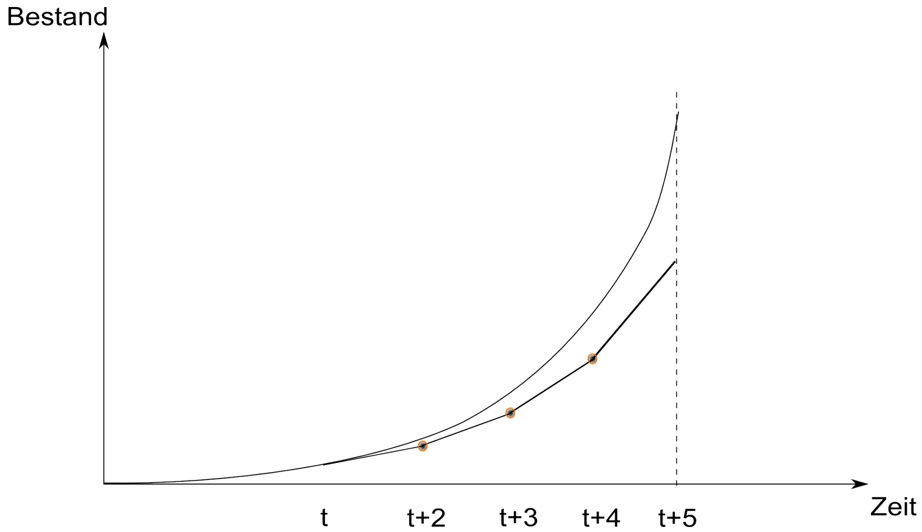

Abbildung 4: Numerische Integration von Flußgrößen zu kontinuierlichen Bestandsgrößen

Das Thema Wahl der Zeitschrittweite möchte ich jetzt an einem konkreten Beispiel austesten: Verzinsung von Guthaben. Die Abbildung 5 zeigt das erstellte Modell im CONSIDEO MODELER. In dieser ist das Hauptmodell und die vier Teilmodelle zu sehen, wobei die Modelle für quartalsweise und jährliche Verzinsung identisch sind. Des Weiteren habe ich eine kontinuierliche Verzinsung modelliert. Das läßt sich modellieren in dem man die Funktion *Guthaben* als eine analytische Funktion angibt und diese dann pro Zeitschritt analytisch berechnet, also nicht als Bestandsfaktor berechnet. Die Funktion lautet $Guthaben_{t+1} = Guthaben_0 * e^{t\frac{Zinsrate}{100}}$. Die Hilfsgrößen t, m und n verwende ich zur Berechnung des $Zeitpunktes$, der für die Simulation des Guthabens bei jährlicher, quartalsweise und monatlicher Verzinsung benutzt wird. Die Formel dafür lautet $Zeitpunkt = t + \frac{m}{n}$, wobei $n = 12$ gesetzt wird. Das entspricht der Anzahl der Monate in einem Jahr. Die Variable t stellt immer den ganzzahligen Anteil des Jahres wieder und die Variable m immer den Monatsanteil. Das bedeutet also für den dritten simulierten Monat weist die Variable $Zeitpunkt$ den Wert $0,25$ aus.

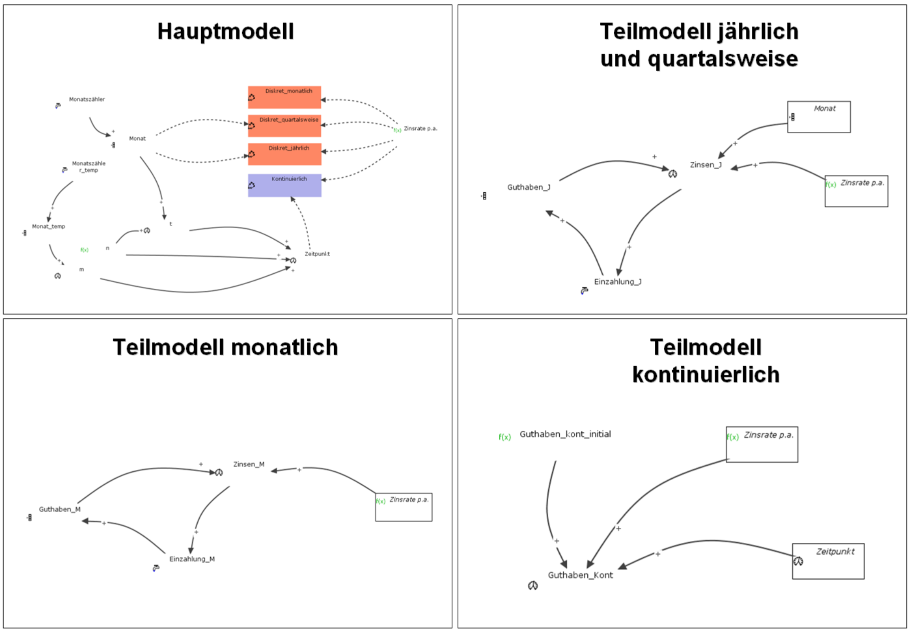

Abbildung 5: Modell Verzinsung von Guthaben

Je größer die Zeitschrittweite gewählt wird, desto geringer fällt der Betrag aus, den man durch Verzinsung erhält und somit auch der Gesamtbetrag. In dieser Simulation wurde ein Zinssatz von 10 % p.a. gewählt. Auf einen Zeitraum von 20 Jahren macht der Unterschied zwischen jährlicher und kontinuierlicher Verzinsung einen Betrag von 700 Euro aus. Wenn Sie also das nächste mal Geld anlegen möchten, konfrontieren Sie Ihren Anlageberater mit diesem Fakt.

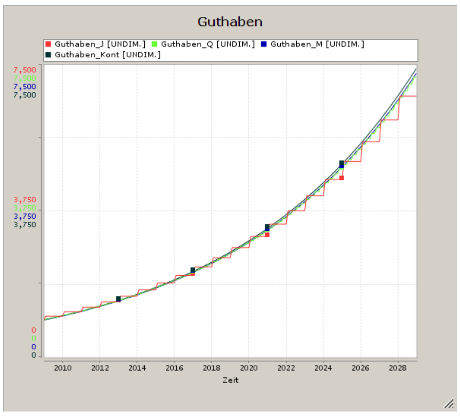

Abbildung 6: Modell Verzinsung von Guthaben: Simulationsergebnis